ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΑΠΛΟΥ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ

Α. ΣΤΟΧΟΙ

- Η εξοικείωση με τη χρήση απλών πειραματικών διατάξεων.
- Η εξοικείωση με μετρήσεις μήκους και χρόνου και η εκτίμηση των σφαλμάτων που υπεισέρχονται κατά τη μέτρησή τους.
- Η εφαρμογή θεωρητικών γνώσεων στον πειραματικό προσδιορισμό της έντασης της βαρύτητας.
- Η κατανόηση και αξιοποίηση της απεικόνισης σε διάγραμμα της ευθέως ανάλογης σχέσης μεταξύ ποσοτήτων.
- Η κατανόηση της σημασίας των εξιδανικεύσεων και προσεγγίσεων κατά την ποσοτική περιγραφή ενός φυσικού φαινομένου.
- Η πραγματοποίηση μικρού πλάτους ταλάντωσης με τη χρήση του απλού εκκρεμούς.
- Η πραγματοποίηση μεγάλου πλάτους ταλάντωσης με τη χρήση του απλού εκκρεμούς.
- Ο πειραματικός υπολογισμός της επιτάχυνσης της βαρύτητας με το απλό εκκρεμές.
- Η κατανόηση της έννοιας του σφάλματος κατά τη μέτρηση.

Β. ΘΕΜΑ

- Μέτρηση της περιόδου του απλού εκκρεμούς
- Χάραξη της καμπύλης $T^2 - \ell$
- Υπολογισμός της έντασης της βαρύτητας g με δύο τρόπους, χρησιμοποιώντας :
  - ✓ τη γραφική παράσταση $T^2 - \ell$
  - ✓ τη σχέση της περιόδου του απλού εκκρεμούς

Γ. ΟΡΓΑΝΑ ΚΑΙ ΣΥΣΚΕΥΕΣ

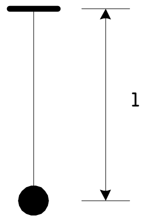
- Ορθοστάτης με ράβδο μήκους 1 m σε βάση
- Σφιγκτήρας τύπου G
- Απλός σύνδεσμος (σταυρός)
- Λαβίδα απλή
- Λεπτό νήμα (πετονιά) μήκους περίπου 2 m
- Μικρό βαρίδι με άγκιστρο (π.χ. μάζας 50 g)
- Δύο νομίσματα (των 0,50 €)
- Κανόνας ή μετροταινία
- Χρονόμετρο
- Μοιρογνωμόνιο

Δ. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

- Για την πραγματοποίηση και κατανόηση της άσκησης χρειάζονται οι παρακάτω γνώσεις από το σχολικό βιβλίο Γενικής Παιδείας της Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου :
  - ✓ Ενότητα 4.1.1 : Περιοδικά φαινόμενα
  - ✓ Ενότητα 4.1.2 : Γραμμική αρμονική ταλάντωση με ιδανικό ελατήριο
  - ✓ Ενότητα 4.1.3 : Απλό εκκρεμές

Επιμέλεια : Μαρίνης Πετρόπουλος, Φυσικός

Ε. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ



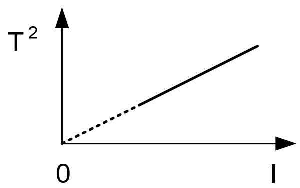
- Η περίοδος των ταλαντώσεων του απλού εκκρεμούς για μικρές γωνίες εκτροπής ($\varphi_o \leq 3^o$), δίνεται από την εξίσωση :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

- Με βάση την εξίσωση αυτή μπορούμε να εργαστούμε με δύο μεθόδους για να υπολογίσουμε την ένταση g του βαρυτικού πεδίου :

✓ $1^η$ μέθοδος :
Από τη σχέση της περιόδου παίρνουμε :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)\ell$$



Η γραφική παράσταση $T^2 - \ell$ είναι ευθεία γραμμή, που περνάει από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση :

$$\text{κλίση} = \kappa = \frac{4\pi^2}{g}$$

Χαράσσοντας τη γραφική παράσταση μπορούμε με τη βοήθεια της κλίσης κ της ευθείας να υπολογίσουμε το g :

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\kappa}$$

✓ $2^η$ μέθοδος :
Από τη σχέση της περιόδου παίρνουμε :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{\ell}{g} \Rightarrow g = 4\pi^2\frac{\ell}{T^2}$$

Μετρώντας το μήκος και την αντίστοιχη περίοδο υπολογίζουμε το g.
Από τις τιμές του g που υπολογίζουμε για τα διάφορα μήκη του απλού εκκρεμούς, βρίσκουμε τη μέση τιμή g_μ της έντασης του βαρυτικού πεδίου.

ΣΤ. ΣΥΝΑΡΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

1. Τοποθετούμε τη βάση του ορθοστάτη στην άκρη του πάγκου για να εκμεταλλευτούμε και το ύψους του. Αν ο ορθοστάτης κινδυνεύει να ανατραπεί ή απλά δεν είναι σταθερός, στερεώνουμε τη βάση στον πάγκο με σφιγκτήρα τύπου G.
2. Δένουμε καλά τη μία άκρη του νήματος στο γάντζο του βαριδιού.
3. Στερεώνουμε την άλλη άκρη της κλωστής με τη βοήθεια της λαβίδας και των δύο νομισμάτων. Το σημείο ανάρτησης του νήματος πρέπει να είναι ακλόνητο.

- Η μέτρηση του μήκους του νήματος γίνεται κατευθείαν με τη μετροταινία. Για ευκολία μπορούμε από πριν να σημειώσουμε πάνω στο νήμα με μαρκαδόρο τα μήκη που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε.
- Η μέτρηση της περιόδου γίνεται με το χρονόμετρο ως εξής :
  - ✓ αφήνουμε το βαρίδι να ισορροπήσει κατακόρυφα
  - ✓ απομακρύνουμε το βαρίδι λίγο από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο
  - ✓ μετράμε δέκα πλήρεις ταλαντώσεις με το χρονόμετρο και υπολογίζουμε την περίοδο

Ζ. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Λήψη μετρήσεων

1. Στερεώνουμε το νήμα στην ακλόνητη λαβίδα με τα δύο νομίσματα, έτσι ώστε το μήκος από το σημείο στήριξης μέχρι το κέντρο βάρους του βαριδιού να είναι $\ell = 40$ cm. Καταγράφουμε την τιμή του ℓ στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
2. Απομακρύνουμε το βαρίδι λίγο από τη θέση ισορροπίας (δεν πρέπει να υπερβούμε τις 10^o) και μετράμε το χρόνο δέκα (10) πλήρων αιωρήσεων. Καταγράφουμε την τιμή των 10Τ στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
3. Αυξάνουμε το μήκος ℓ σταδιακά κατά 20 cm μέχρι μήκους 160 cm και μετράμε κάθε φορά τον αντίστοιχο χρόνο των 10Τ. Καταγράφουμε τις τιμές στον ΠΙΝΑΚΑ 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 – ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ		
Α / Α	ℓ (cm)	10 Τ (s)
1	40	
2	60	
3	80	
4	100	
5	120	
6	140	
7	160	

4. Για μήκος $\ell = 100$ cm οριζοντιώνουμε σχεδόν το νήμα και μετράμε το χρόνο δέκα πλήρων αιωρήσεων. Καταγράφουμε το αποτέλεσμα στον ΠΙΝΑΚΑ 2 μαζί με το αντίστοιχο αποτέλεσμα ίδιου μήκους, που έχουμε από τον ΠΙΝΑΚΑ 1, για μικρή γωνία εκτροπής.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 – ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ			
Μήκος εκκρεμούς	ℓ	100	cm
10 περίοδοι (για μικρή γωνία εκτροπής από ΠΙΝΑΚΑ 1)	$10\ T_1$		s
10 περίοδοι (για μεγάλη γωνία εκτροπής $\varphi = 90^o$)	$10\ T_2$		s

Επεξεργασία μετρήσεων

1. Υπολογίζουμε την περίοδο T και το T^2 για κάθε μήκος ℓ και συμπληρώνουμε τις αντίστοιχες στήλες του ΠΙΝΑΚΑ 3.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3 – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ			
Α / Α	ℓ (m)	T (s)	T^2 (s^2)
1	0,40		
2	0,60		
3	0,80		
4	1,00		
5	1,20		
6	1,40		
7	1,60		

2. Κάνουμε τη γραφική παράσταση $T^2 - \ell$ των αντίστοιχων τιμών του ΠΙΝΑΚΑ 3, έτσι ώστε να διέρχεται όσο το δυνατόν πλησιέστερα στο σύνολο των πειραματικών σημείων.
3. Υπολογίζουμε την κλίση κ της ευθείας $T^2 - \ell$ και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 4.
4. Υπολογίζουμε την τιμή της g_κ από τη σχέση $g_\kappa = 4\pi^2 / \kappa$ χρησιμοποιώντας την κλίση κ της ευθείας και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 4.
5. Υπολογίζουμε το % σφάλμα της πειραματικής τιμής g_κ που βρίσκουμε από την κλίση της ευθείας, σε σχέση με την θεωρητική τιμή $g_\theta = 9{,}81\ m/s^2$ που ισχύει στην Αθήνα :
$$\sigma_g \% = (| g_\theta - g_\kappa | / g_\theta)\ 100\ \%$$
και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 4.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4 – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ			
Κλίση ευθείας $T^2 - \ell$	κ		s^2 / m
Επιτάχυνση βαρύτητας g_κ από την κλίση	g_κ		m / s^2
Επιτάχυνση βαρύτητας g_θ (θεωρητική)	g_θ	9,81	m / s^2
Σχετικό σφάλμα μεταξύ g_κ και g_θ	σ_g %		%

6. Από τις τιμές του ΠΙΝΑΚΑ 2 υπολογίζουμε τις τιμές των περιόδων T_1 και T_2 για μικρή και μεγάλη γωνία εκτροπής αντίστοιχα. Καταχωρούμε τις τιμές στον ΠΙΝΑΚΑ 5.
7. Υπολογίζουμε τη σχετική % διαφορά των περιόδων $\sigma_T \% = (| T_1 - T_2 | / T_1)\ 100\ \%$. Καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 5.
8. Πού οφείλεται η διαφορά μεταξύ των δύο περιόδων ; Συμπληρώνουμε το συμπέρασμα του ΠΙΝΑΚΑ 5 διαγράφοντας τις κατάλληλες υπογραμμισμένες λέξεις.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5 – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ / ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ			
Μήκος εκκρεμούς	ℓ	100	cm
Περίοδος (για μικρή γωνία εκτροπής)	T_1		s
Περίοδος (για μεγάλη γωνία εκτροπής $\varphi = 90^o$)	T_2		s
Σχετική διαφορά μεταξύ T_1 και T_2	σ_T %		%
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ : Η διαφορά μεταξύ των δύο περιόδων είναι ελάχιστη / μικρή / μεγάλη και αυτό οφείλεται στο ότι η περιοδική κίνηση του εκκρεμούς με μεγάλη γωνία εκτροπής είναι / δεν είναι γραμμική αρμονική ταλάντωση.			

Προαιρετικά :

9. Μεταφέρουμε από τον ΠΙΝΑΚΑ 3 τις τιμές του T^2 στον ΠΙΝΑΚΑ 6.
10. Υπολογίζουμε για κάθε μήκος του εκκρεμούς την επιτάχυνση της βαρύτητας g και καταχωρούμε τις τιμές στον ΠΙΝΑΚΑ 6.
11. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή g_μ της επιτάχυνσης της βαρύτητας και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 6.
12. Υπολογίζουμε τη σχετική % διαφορά $\sigma_g \% = (| g_\kappa - g_\mu | / g_\kappa) \cdot 100 \%$ μεταξύ της επιτάχυνσης g_κ που βρήκαμε χρησιμοποιώντας την κλίση κ της ευθείας και της μέσης επιτάχυνσης g_μ. Καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 6.
13. Πού οφείλεται η διαφορά μεταξύ των δύο περιόδων ; Συμπληρώνουμε το συμπέρασμα του ΠΙΝΑΚΑ 6 αξιολογώντας τις δύο μεθόδους.

ΠΙΝΑΚΑΣ 6 – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ / ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ				
Α / Α	ℓ (m)	T^2 (s^2)	$g = 4\pi^2 \ell / T^2$ (m/s^2)	g_μ (m/s^2)
1	0,40			
2	0,60			
3	0,80			
4	1,00			
5	1,20			
6	1,40			
7	1,60			
Σχετική % διαφορά μεταξύ g_κ και g_μ		σ_g %		%
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ :				

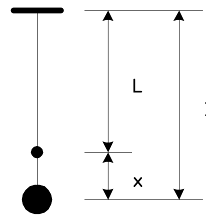
Η. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Γιατί το νήμα του απλού εκκρεμούς πρέπει να είναι μη εκτατό ;
2. Γιατί το βαρίδι πρέπει να εκτρέπεται κατά μικρή γωνία από τη θέση ισορροπίας ;
3. Πώς αποφεύγουμε τις τριβές με τον αέρα ;
4. Να γίνει αξιολόγηση όλων των εξιδανικεύσεων, που κάνουμε για το απλό εκκρεμές.
5. Η σχέση των T^2 και ℓ είναι ευθέως ανάλογη ; Πώς φαίνεται αυτό ;
6. Η καμπύλη της γραφικής παράστασης $T^2 - \ell$ περνάει από την αρχή των αξόνων ; Τι σημαίνει αυτό ;
7. Πού οφείλεται το σφάλμα στην τιμή του g_κ που βρήκαμε ;

Θ. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ … ΓΙΑ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ (η μέθοδος του κόμπου !)

Εισαγωγή

- Κατά την προηγούμενη διαδικασία υπάρχει μια δυσκολία όσον αφορά τη μέτρηση του μήκους ℓ του απλού εκκρεμούς, διότι δεν είναι γνωστή η θέση του κέντρου βάρους του βαριδιού. Αυτό επιτείνεται όταν χρησιμοποιούμε π.χ. κωνικό βαρίδι.
- Για να αποφύγουμε το σφάλμα στη μέτρηση του μήκους ℓ του απλού εκκρεμούς, καταφεύγουμε στο ακόλουθο τέχνασμα (μέθοδος του κόμπου) :
  - ✓ Κάνουμε πάνω στο νήμα και κοντά στο βαρίδι ένα ευδιάκριτο κόμπο, που απέχει σταθερή απόσταση x από το κέντρο βάρους του βαριδιού.
  - ✓ Το μήκος του εκκρεμούς θα είναι τώρα $\ell = L + x$, όπου :
    x είναι η σταθερή και ακαθόριστη απόσταση του κόμπου από το κέντρο βάρους του βαριδιού
    L είναι η απόσταση του κόμπου από το σημείο στήριξης, που τη μετράμε με τη μετροταινία
- Η περίοδος της ταλάντωσης σ' αυτή την περίπτωση θα είναι :

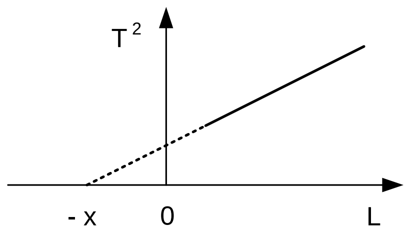


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L+x}{g}} \Rightarrow$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{g}\right)L + \left(\frac{4\pi^2 x}{g}\right)$$

- Η γραφική παράσταση $T^2 - L$ είναι ευθεία γραμμή με κλίση την ίδια ποσότητα $\kappa = \dfrac{4\pi^2}{g}$

- Η σχέση $T^2 = f(L)$ μας οδηγεί να βρούμε :
  - ✓ το g από την κλίση κ της ευθείας χωρίς να είναι απαραίτητη η γνώση του μήκους x
  - ✓ το ακαθόριστο μήκος x , αν μας ζητείται
  - ✓ το ακριβές μήκος ℓ του απλού εκκρεμούς, αν μας ζητείται



- Η ένταση της βαρύτητας g υπολογίζεται, όπως και με την κανονική διαδικασία, από την κλίση κ της ευθείας :

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\kappa}$$

- Το ακαθόριστο μήκος x (απόσταση του κόμπου από το κέντρο βάρους του βαριδιού) υπολογίζεται από τη σχέση $T^2 = f(L)$:
  - ✓ Για $T^2 = 0$ προκύπτει $L = -x$, δηλαδή το σημείο τομής της ευθείας με τον άξονα των L μας δίνει το άγνωστο μήκος x
  - ✓ Η εύρεση του μήκους x δεν είναι υποχρεωτική για τον υπολογισμό του g
  - ✓ Το ακριβές μήκος ℓ του απλού εκκρεμούς, στην περίπτωση που μας ζητείται, βρίσκεται πλέον από τη σχέση : $\ell = L + x$

Πειραματική διαδικασία

1. Ακολουθούμε την προηγούμενη πειραματική διαδικασία (Ζ. 1 – 3) και για διάφορα μήκη του L (απόσταση του κόμπου από το σημείο στήριξης) μετράμε τον αντίστοιχο χρόνο δέκα πλήρων αιωρήσεων. Καταγράφουμε τις τιμές στον ΠΙΝΑΚΑ 7.
2. Υπολογίζουμε την T και T^2 και καταχωρούμε τις τιμές τους στον ΠΙΝΑΚΑ 7.

ΠΙΝΑΚΑΣ 7				
	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ		ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ	
Α / Α	L (m)	10 T (s)	T (s)	T^2 (s^2)
1	0,20			
2	0,40			
3	0,60			
4	0,80			
5	1,00			
6	1,20			
7	1,40			

3. Κάνουμε τη γραφική παράσταση $T^2 – L$ των πειραματικών σημείων του ΠΙΝΑΚΑ 7.
4. Υπολογίζουμε την κλίση κ της ευθείας $T^2 – L$ και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 8.
5. Υπολογίζουμε την τιμή $g_κ$ χρησιμοποιώντας την κλίση κ της ευθείας $g_κ = 4\,π^2 / κ$ και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 8.
6. Υπολογίζουμε το % σφάλμα της πειραματικής τιμής $g_κ$ που βρίσκουμε από την κλίση της ευθείας, σε σχέση με την θεωρητική τιμή $g_θ = 9{,}81\ m / s^2$ που ισχύει στην Αθήνα :
$$σ_g\,\% = (| g_θ – g_κ | / g_θ) \cdot 100\,\%$$
και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 8.

ΠΙΝΑΚΑΣ 8 – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ			
Κλίση ευθείας $T^2 – L$	κ		s^2 / m
Επιτάχυνση βαρύτητας $g_κ$ από την κλίση	$g_κ$		m / s^2
Επιτάχυνση βαρύτητας $g_θ$ (θεωρητική)	$g_θ$	9,81	m / s^2
Σχετικό σφάλμα μεταξύ $g_κ$ και $g_θ$	$σ_g$ %		%

Ερωτήσεις

Όλες οι ερωτήσεις της προηγούμενης μεθόδου και επί πλέον οι παρακάτω :
1. Η καμπύλη $T^2 – L$ περνάει από την αρχή των αξόνων ; Τι σημαίνει αυτό ;
2. Η κλίση της καμπύλης εξαρτάται από το εάν χρησιμοποιούμε σαν μήκος το ℓ ή το L ;
3. Πώς υπολογίζουμε το g με αυτή τη μέθοδο ; Διαφέρει η μέθοδος από την προηγούμενη ως προς τους υπολογισμούς ;
4. Πώς υπολογίζουμε το x ; (απόσταση του κόμπου από το κέντρο βάρους του βαριδιού). Είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του x για την εύρεση του g ;
5. Πόσο είναι το μήκος ℓ του απλού εκκρεμούς, όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του κόμπου ;