

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΚΥΛΙΟΜΕΝΟΥ ΣΕ ΚΕΚΛΙΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (ΜΕ ΑΞΟΝΑ)

A. ΣΤΟΧΟΙ

- Η εξοικείωση με τη συναρμολόγηση και χρήση απλών πειραματικών διατάξεων.
- Η εξοικείωση με μετρήσεις μάζας, μήκους και χρόνου.
- Η εξοικείωση με την οριζοντίωση συσκευών.
- Η εφαρμογή θεωρητικών γνώσεων στην κίνηση στερεού σώματος.
- Η κατανόηση και η εκτίμηση των σφαλμάτων που υπεισέρχονται κατά τη μέτρηση μάζας, χρόνου και μήκους.

B. ΘΕΜΑ

- Ο πειραματικός υπολογισμός της ροπής αδράνειας I_{π} ενός κυλίνδρου, που κατεβαίνει κυλιόμενος περί τον άξονά του σε κεκλιμένο επίπεδο.
- Η σύγκριση μεταξύ πειραματικής και θεωρητικής τιμής της ροπής αδράνειας του κυλίνδρου.

Γ. ΟΡΓΑΝΑ

- Διάδρομος κύλισης
- Υποστηρίγματα
- Συμπαγής κύλινδρος με άξονα περιστροφής (γνωστών στοιχείων)
- Ζυγός (2 kg)
- Μετροταινία
- Παχύμετρο
- Χρονόμετρο
- Αεροστάθμη (αλφάδι)

Δ. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

- Για την πραγματοποίηση και κατανόηση της άσκησης χρειάζονται οι παρακάτω γνώσεις από το σχολικό βιβλίο Κατεύθυνσης της Γ' τάξης Γενικού Λυκείου :
 - ✓ Ενότητα 4.2 : Οι κινήσεις των στερεών σωμάτων
 - ✓ Ενότητα 4.5 : Ροπή αδράνειας
 - ✓ Σελίδα 129 : Παράδειγμα 4.13

Ε. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

- Η θεωρητική τιμή της ροπής αδράνειας I_{θ} ενός κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R είναι :

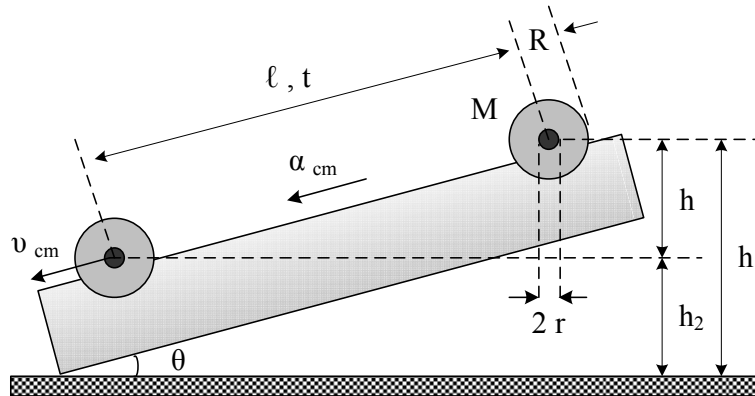
$$I_{\theta} = \frac{1}{2} M R^2 \quad (1)$$

- Η πειραματική τιμή της ροπής αδράνειας I_{π} του κυλίνδρου, που κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο ξεκινώντας από κάποιο ύψος h , υπολογίζεται εφαρμόζοντας το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

- Τη στιγμή που ο κύλινδρος φτάνει στο κατώτερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου, η αρχική δυναμική του ενέργεια U έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια $K_{\text{μετ}}$ λόγω της μεταφορικής κίνησης και σε κινητική ενέργεια $K_{\text{περ}}$ λόγω της περιστροφικής κίνησης :

$$U = K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}} \Rightarrow$$

$$M g h = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\pi} \omega^2 \quad (2)$$



- Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε κάθε στιγμή η μεταφορική του ταχύτητα v_{cm} είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα v των σημείων της περιφέρειας του άξονά του και επομένως :

$$v = \omega r \quad \text{ή} \quad v_{\text{cm}} = \omega r \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{v_{\text{cm}}}{r} \quad (3)$$

- Η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου στο κεκλιμένο επίπεδο είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, (οι δυνάμεις που δέχεται είναι σταθερές), οπότε :

$$\checkmark \text{ Ταχύτητα στην Ε.Ο.Ε.Κ. (Χ.Α.Τ.):} \quad v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t \quad (4)$$

$$\checkmark \text{ Μετατόπιση στην Ε.Ο.Ε.Κ. (Χ.Α.Τ.):} \quad \ell = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2 \quad (5)$$

- Από τις σχέσεις (4) και (5) με απαλοιφή του α_{cm} προκύπτει :

$$v_{\text{cm}} = \frac{2\ell}{t} \quad (4')$$

- Από τη σχέση (2) αντικαθιστώντας διαδοχικά τις υπόλοιπες προκύπτει :

$$M g h = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\pi} \omega^2 \xrightarrow{(3)}$$

$$M g h = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\pi} \left(\frac{v_{\text{cm}}^2}{r^2} \right) \xrightarrow{(4')}$$

$$M g h = \frac{1}{2} M \left(\frac{4\ell^2}{t^2} \right) + \frac{1}{2} I_{\pi} \left(\frac{4\ell^2}{r^2 t^2} \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{\pi} = M r^2 \left(\frac{g h}{2\ell^2} \cdot t^2 - 1 \right)} \quad (6)$$

ΣΤ. ΣΥΝΑΡΜΟΛΟΓΗΣΗ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

- Με τα υποστηρίγματα δίνουμε μια μικρή κλίση στον διάδρομο κύλισης, ώστε να έχουμε κύλιση και όχι ολίσθηση.
- Για να μην κάνουμε μεγάλο σφάλμα στη μέτρηση του χρόνου πρέπει να αποφεύγουμε για το κεκλιμένο επίπεδο τα μικρά μήκη και τις μεγάλες κλίσεις.
- Χαράσσουμε μία γραμμή στο πάνω και μία γραμμή στο κάτω μέρος του κεκλιμένου επιπέδου, μεταξύ των οποίων θα μελετάμε την κίνηση.
- Οριζοντιώνουμε το κεκλιμένο επίπεδο στην εγκάρσια διεύθυνση, για να μπορεί να κατεβαίνει ο κύλινδρος χωρίς να χτυπάει δεξιά – αριστερά στον διάδρομο.
- Την ακτίνα του κυλίνδρου μπορούμε να την μετρήσουμε με τρεις τρόπους :
 - ✓ με το παχύμετρο
 - ✓ με τη βοήθεια λεπτής κλωστής που την τυλίγουμε στην περιφέρεια του κυλίνδρου
 - ✓ με τη βοήθεια δύο σανιδιών που τα εφαρμόζουμε παράλληλα στον κύλινδρο

Ζ. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Λήψη μετρήσεων

1. Σημειώνουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας g στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
2. Ζυγίζουμε τον κύλινδρο και σημειώνουμε τη μάζα του M στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
3. Μετράμε με παχύμετρο τη διάμετρο δ του άξονα του κυλίνδρου και τη σημειώνουμε στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
4. Μετράμε με παχύμετρο τη διάμετρο Δ του κυλίνδρου και τη σημειώνουμε στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
5. Μετράμε με μετροταινία την απόσταση ℓ , που θα διανύει ο κύλινδρος, μεταξύ των δύο γραμμών που έχουμε χαράξει στο κεκλιμένο επίπεδο και σημειώνουμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
6. Μετράμε με παχύμετρο το ύψος h_1 της αρχικής άνω θέσης του κυλίνδρου από το οριζόντιο επίπεδο και σημειώνουμε την τιμή του στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
7. Μετράμε με παχύμετρο το ύψος h_2 της τελικής κάτω θέσης του κυλίνδρου από το οριζόντιο επίπεδο και σημειώνουμε την τιμή του στον ΠΙΝΑΚΑ 1.
8. Αφήνουμε τον κύλινδρο από την πάνω γραμμή που έχουμε χαράξει στο κεκλιμένο επίπεδο (ύψος h) και μετράμε πέντε φορές το χρόνο (t_1, \dots, t_5), που χρειάζεται για να φτάσει στην κάτω γραμμή, σημειώνοντας τις μετρήσεις μας στον ΠΙΝΑΚΑ 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 – ΔΕΔΟΜΕΝΑ & ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ			
Επιτάχυνση βαρύτητας	g	9,81	m / s^2
Μάζα κυλίνδρου	M		g
Διάμετρος άξονα κυλίνδρου	δ		mm
Διάμετρος κυλίνδρου	Δ		mm
Απόσταση που διανύει ο κύλινδρος στο κεκλιμένο επίπεδο	ℓ		cm
Αρχική άνω θέση κυλίνδρου	h_1		cm
Τελική κάτω θέση κυλίνδρου	h_2		cm
Χρόνος κίνησης του κυλίνδρου – 1 ^η μέτρηση	t_1		s
Χρόνος κίνησης του κυλίνδρου – 2 ^η μέτρηση	t_2		s
Χρόνος κίνησης του κυλίνδρου – 3 ^η μέτρηση	t_3		s
Χρόνος κίνησης του κυλίνδρου – 4 ^η μέτρηση	t_4		s
Χρόνος κίνησης του κυλίνδρου – 5 ^η μέτρηση	t_5		s

Επεξεργασία μετρήσεων

- Υπολογίζουμε την ακτίνα r του άξονα του κυλίνδρου και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 2.
- Υπολογίζουμε την ακτίνα R του κυλίνδρου και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 2.
- Υπολογίζουμε την κατακόρυφη μετατόπιση h του κυλίνδρου και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 2.
- Υπολογίζουμε τη μέση τιμή του χρόνου κίνησης t του κυλίνδρου και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 2.
- Υπολογίζουμε την πειραματική τιμή I_{π} της ροπής αδράνειας του κυλίνδρου από τη σχέση (6) και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 2.
- Υπολογίζουμε την θεωρητική τιμή I_{θ} της ροπής αδράνειας του κυλίνδρου από τη σχέση (1) και καταχωρούμε την τιμή της στον ΠΙΝΑΚΑ 2.
- Υπολογίζουμε το σχετικό σφάλμα σ % μεταξύ της πειραματικής τιμής της ροπής αδράνειας του κυλίνδρου και της θεωρητικής τιμής της και καταχωρούμε την τιμή του στον ΠΙΝΑΚΑ 2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ			
Ακτίνα άξονα κυλίνδρου :	$r = \frac{\delta}{2}$	r	mm
Ακτίνα κυλίνδρου :	$R = \frac{\Delta}{2}$	R	mm
Κατακόρυφη μετατόπιση του κυλίνδρου :	$h = h_1 - h_2$	h	cm
Μέσος χρόνος κίνησης του κυλίνδρου :	$t = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{5}$	t	s
Πειραματική τιμή ροπής αδράνειας :	$I_{\pi} = M r^2 \left(\frac{gh}{2\ell^2} \cdot t^2 - 1 \right)$	I_{π}	kg · m ²
Θεωρητική τιμή ροπής αδράνειας :	$I_{\theta} = \frac{1}{2} M R^2$	I_{θ}	kg · m ²
Σχετικό σφάλμα μεταξύ I_{π} και I_{θ} :	$\sigma \% = \frac{ I_{\theta} - I_{\pi} }{I_{\theta}} 100 \%$	$\sigma \%$	%

Η. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

- Σε ποιους παράγοντες μπορεί να οφείλεται το σφάλμα στον πειραματικό υπολογισμό της ροπής αδράνειας ;
- Πώς μπορούμε να αποφύγουμε το σφάλμα στη μέτρηση της κατακόρυφης μετατόπισης ;
- Πώς μπορούμε να αποφύγουμε το σφάλμα στη μέτρηση του χρόνου ;
- Πώς μπορούμε να αποφύγουμε την ολίσθηση κατά την κίνηση του κυλίνδρου ;
- Πώς μπορούμε να δικαιολογήσουμε τη χρήση της Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας κατά την κύλιση του κυλίνδρου, αφού για να υπάρχει κύλιση χρειάζεται στατική τριβή, η οποία είναι δύναμη μη συντηρητική ;
- Πού μπορούμε να αποδώσουμε την απόκλιση της πειραματικής τιμής της ροπής αδράνειας από την αντίστοιχη θεωρητική ;